

Algèbre Linéaire
Exercices corrigés
Tome I

Chez le même éditeur

Parmi les derniers titres parus

Mathématiques fondamentales en astronomie et en mécanique céleste	Meunier P.
33 leçons d'analyse pour l'agrégation interne de mathématiques. Oral 1	Pruneau G.
Voyage au Cœur des Espaces Non-Archimédiens. Une nouvelle vision des opérateurs linéaires.....	Ammar A.
33 leçons d'algèbre pour l'agrégation interne de mathématiques. Oral 1	Pruneau G.
Multicolinéarité. Livre 5. Économétrie Expliquée et Appliquée	Mourad M.
Analyse de régression linéaire et hétéroscédasticité. Livre 4. Économétrie Expliquée et Appliquée	Mourad M.
Analyse de régression linéaire et autocorrélations des erreurs. Livre 3. Économétrie Expliquée et Appliquée.....	Mourad M.
Méthodes numériques pour l'ingénieur.....	Cerf M.
Intégration et Probabilités. Cours et exercices corrigés.....	Ammar A., Souissi C.
Introduction à la géométrie affine et à la convexité. Cours et Exercices	Ait Ben Hassi El M.
Quelques thèmes de recherche en mathématiques. TIPE autour de l'algèbre de Clifford	Anglès P.
Analyse de régression linéaire simple. Livre 1. Économétrie Expliquée et Appliquée.....	Mourad M.
Analyse de régression linéaire multiple. Livre 2. Économétrie Expliquée et Appliquée.....	Mourad M.
Probabilités du Lycée au Supérieur. Structure et fiabilité des sondages.....	Celhay M.
Traitement numérique des fonctions avec MAPLE	Imokrane J.-F.
Ah ! les nombres premiers... 57 pintxos sur ces "incassables" de l'arithmétique	Hiriart-Urruty J.-B.
Algèbre Linéaire	Grifone J.
Analyse. Cours et exercices corrigés MPSI-PCSI	Ammar A., Jeribi A.

Collection Bien débiter en mathématiques

Retrouvez l'intégralité de la collection →



Collection Bien maîtriser les mathématiques

Retrouvez l'intégralité de la collection →



Groupes, Anneaux et corps.....	Colin J.-J., Morvan J.-M.
Courbes Paramétrées du Plan Euclidien.....	Morvan J.-M.
Autour du Théorème de Cauchy-Lipschitz. Équations différentielles	Sondaz D., Morvan J.-M.
Introduction à la Topologie. Espaces topologiques, métriques, normés	Sondaz D., Morvan R.
Limites, applications continues, espaces complets	Sondaz D., Morvan R.
Compacité, Connexité : Introduction à la Topologie.....	Sondaz D.

© CEPAD 2026

ISBN : 978.2.38395.212.1



Le code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants-droit. Or, cette pratique en se généralisant provoquerait une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, du présent ouvrage est interdite sans autorisation de l'Éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC – 3, rue d'Haute-feuille – 75006 Paris).

Dépôt légal : mars 2026

Algèbre Linéaire

Exercices corrigés

Tome I

Maxime NAJAC
Joseph GRIFONE

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE – France

05 61 40 57 36

www.cepadues.com
cepadues@cepadues.com

Sommaire

Avant-propos	5
Notations	8
I Espaces Vectoriels	1
I.1 Rappels de cours	1
I.1.1 Espaces vectoriels	1
I.1.2 Sous-espaces vectoriels	2
I.1.3 Bases (en dimension finie)	2
I.1.4 Existence de bases (en dimension finie)	3
I.1.5 Les théorèmes fondamentaux sur la dimension	3
I.1.6 Bases en dimension infinie	4
I.1.7 Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires	4
I.1.8 Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces	5
I.2 Énoncés des exercices	6
I.3 Corrections	12
I.4 Récapitulatif des méthodes	46
Démontrer qu'une partie d'un sous-espace vectoriel est/n'est pas un sous-espace vectoriel	46
Démontrer que des sous-espaces sont en somme directe/supplémentaires	46
Démontrer qu'une famille est libre	47
Démontrer qu'une famille est une base	47
Compléter une famille libre en une base	47
Trouver une base d'un sous-espace vectoriel	47
Trouver une base de $F + G$	47
Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux	48
Trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel	48
I.5 Erreurs fréquentes à éviter et remarques	48
I.6 Codes Python	49
II La méthode du pivot (ou méthode d'élimination de Gauss)	51
II.1 Rappels de cours	51
II.1.1 Étude d'un système d'équations linéaires par la méthode du pivot	51
II.1.2 Cas des systèmes linéaires homogènes	52
II.1.3 Utilisation pratique de la méthode du pivot	52
II.2 Énoncés des exercices	53
II.3 Corrections	56
II.4 Récapitulatif des méthodes	75
Résoudre un système par la méthode d'élimination de Gauss	75
II.5 Erreurs fréquentes à éviter et remarques	76
II.6 Codes Python	77
III Applications linéaires et matrices	79
III.1 Rappels de cours	79

III.1.1	Applications linéaires	79
III.1.2	Image et noyau. Image d'une famille de vecteurs	80
III.1.3	Matrices et applications linéaires	80
III.1.4	Produit de deux matrices	81
III.1.5	Matrice d'un vecteur. Calcul de l'image d'un vecteur	82
III.1.6	Produits de matrices. Matrice de l'inverse d'une application	82
III.1.7	Changement de base	82
III.1.8	Rang d'une application linéaire et rang d'une matrice	83
III.1.9	Espace dual	83
III.1.10	Annulateur d'un sous-espace	84
III.2	Énoncés des exercices	84
III.3	Corrections	96
III.4	Récapitulatif des méthodes	167
	Démontrer qu'une application est injective	167
	Démontrer qu'une application est surjective	167
	Démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme	168
	Trouver une base du noyau d'une application linéaire	168
	Trouver une base de l'image d'une application linéaire	168
	Construire des endomorphismes vérifiant des propriétés particulières . . .	169
	Démontrer qu'une application linéaire est une projection (ou une symétrie)	169
	Écrire la matrice d'une application linéaire	169
	Calcul du rang d'une matrice	169
	Déterminer la matrice d'une projection	169
	Calculer la puissance d'une matrice	170
	Démontrer qu'une matrice est inversible	170
	Inverser une matrice	170
III.5	Erreurs fréquentes à éviter et remarques	170
III.6	Codes Python	171
IV	Déterminants	173
IV.1	Rappels de cours	173
IV.1.1	Définition des déterminants par récurrence	173
IV.1.2	Les déterminants vus comme formes multilinéaires alternées	174
IV.1.3	Permutations, transpositions, signature	174
IV.1.4	Déterminant de la transposée d'une matrice	175
IV.1.5	Calcul des déterminants	175
IV.1.6	Déterminant du produit de matrices. Déterminant d'un endomor- phisme	175
IV.1.7	Calcul de l'inverse d'une matrice	175
IV.1.8	Interprétation géométrique du déterminant : volume dans $\mathbb{R}^n$. . .	176
IV.1.9	Orientation	176
IV.2	Énoncés des exercices	176
IV.3	Corrections	184
IV.4	Récapitulatif des méthodes	224
	Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints . .	224
	Décomposer une permutation en produit de transpositions	224
	Calculer la signature d'une permutation	225
	Calculer la puissance d'une permutation	225
	Calculer le déterminant d'une matrice	225
	Calculer le déterminant d'un endomorphisme	225
	Déterminer si des vecteurs sont libres ou liés dans un espace vectoriel . .	225
IV.5	Codes Python	225
V	Systèmes d'équations linéaires	227
V.1	Rappels de cours	227
V.1.1	Définitions et interprétations	227

Avant-propos

L'algèbre linéaire est l'étude minutieuse du langage mathématique permettant d'exprimer l'une des idées les plus répandues dans les sciences naturelles : celle de linéarité. L'exemple le plus important de ce concept pourrait très bien être le principe de linéarité des petits incréments : presque tout processus naturel est linéaire pour de petites quantités. Ce principe est à la base de l'analyse mathématique et de ses applications.

Maîtriser un cours, fût-il bien construit, ne se réduit jamais à une simple acquisition passive. L'expérience montre que la connaissance du cours, indispensable, n'est qu'une première étape. Il faut s'y confronter, le mettre à l'épreuve du calcul et de l'erreur, pour en saisir la substance véritable. C'est dans cet esprit que ce livre a été conçu : non comme un énième exposé théorique, mais comme un compagnon de travail, dédié à la correction détaillée des exercices du cours d'*Algèbre Linéaire* : [8].

Ce livre ne saurait remplacer le cours, dont il prolonge au contraire la vocation. Toutes les séries d'exercices, y compris celles marquées d'un ou plusieurs astérisques signalant leur difficulté, y sont résolues avec minutie. Séparés par une barre horizontale, sont ajoutés certains exercices et problèmes qui visent à affiner l'intuition et la technique. Des exercices d'application sont également proposés aux lecteurs-étudiants curieux qui se demandent « à quoi tout cela peut servir ? » ou « pourquoi faisons-nous cela ? ». Il s'agit parfois de simples applications à la physique, d'exercices inspirés de problématiques de recherche actuelles, ou de situations issues de l'ingénierie contemporaine. Ils mettent en lumière la pertinence des notions abordées et la portée concrète de la discipline. Ils sont séparés, dans les chapitres du reste des exercices par des astérisques et un encadré "Regards sur les applications".

Ce livre est né d'une demande répétée d'étudiants et de lecteurs, qui souhaitent disposer de solutions détaillées pour accompagner leur apprentissage de l'algèbre linéaire. Nous avons choisi d'y répondre en proposant un ouvrage qui s'adresse avant tout à ceux qui cherchent à comprendre les notions en profondeur, sans pour autant négliger les attentes des futurs ingénieurs ou chercheurs en physique. Notre approche s'inspire de deux perspectives complémentaires : celle de l'universitaire, attentif à la conceptualisation et à la compréhension fine des objets mathématiques, et celle de l'ingénieur, formé à la rigueur et à la précision, pour qui la maîtrise technique et la clarté de la rédaction sont essentielles. Nous avons souhaité offrir des corrections qui éclairent les raisonnements, explicitent les chemins de pensée, et aident à assimiler les concepts fondamentaux. Les nouveaux "exercices appliqués" proposés visent à renforcer cette double dimension : théorique et pratique. Ce livre ne se présente pas comme une alternative aux excellents ouvrages déjà existants, mais comme une contribution modeste, centrée sur l'assimilation progressive des idées et sur l'acquisition d'une agilité mathématique utile, que ce soit pour aborder un concours, un examen, ou simplement pour approfondir sa culture scientifique.

Nous avons veillé à conserver le style qui caractérisent le livre du cours, tout en apportant, lorsque cela était utile, des éclairages nouveaux. Qu'il soit pour l'étudiant un guide exigeant mais bienveillant, pour le praticien une source de vérification méthodique, et pour l'amateur éclairé une invitation à la redécouverte d'une discipline fondamentale.

Beaucoup d'étudiants, à un moment ou à un autre, se heurtent à une difficulté apparente :

malgré les nombreux exercices qu'ils réalisent, ils ont parfois l'impression de ne pas progresser comme ils le souhaiteraient.

Faire des exercices de mathématiques, c'est s'imprégner d'un langage et d'idées, et s'entraîner à les mobiliser. Pourtant, au-delà d'un certain seuil, multiplier les exercices ne garantit plus de progrès. La quantité ne suffit plus : c'est la manière de les aborder qui devient décisive. Plutôt que de s'épuiser à en accumuler, mieux vaut prendre le temps d'analyser chaque problème, d'en dégager les raisonnements sous-jacents, et de relier les méthodes entre elles. C'est dans ce travail de réflexion et de synthèse que se construit une compréhension profonde, bien au-delà de la simple répétition.

Ce livre a pris forme et s'est affiné au fil des cours, dans un dialogue constant avec les étudiants des CPGE, des universités et des écoles d'ingénieurs, ainsi qu'avec leurs professeurs. Leurs questionnements, leurs remarques et leur regard critique ont nourri notre réflexion et orienté de nombreux choix pédagogiques. Nous leur en sommes reconnaissants. Il leur est dédié, qu'ils soient « taupins », étudiants en licence ou master, agrégatifs, élèves-ingénieurs, ou tout simplement des passionnés de mathématiques. Sa vocation est de faciliter leur apprentissage, de les accompagner dans le franchissement des obstacles, et de les guider vers une compréhension à la fois profonde et intuitive de cette discipline essentielle. Nous nous sommes efforcés d'amener le lecteur à adopter différents points de vue, afin de développer ce que l'on appelle la "vision mathématique". Nous encourageons chaleureusement chaque lecteur à aborder les exercices avec patience et ténacité, et à voir dans ce livre non seulement un outil de progression académique, mais surtout un compagnon dans leur exploration scientifique.

La réalisation de cet ouvrage n'aurait pu aboutir sans le concours précieux de celles et ceux qui, par leur expertise et leur bienveillance, ont enrichi son contenu. Leurs relectures attentives et leurs suggestions éclairées ont été déterminantes pour affiner la qualité des solutions proposées. Nous adressons nos plus vifs remerciements à :

- **M. Abdallah AMMAR**, ingénieur de recherche au Laboratoire de Physique et Chimie Théorique de Nancy (LPCT – service Calcul Scientifique) : Ses discussions passionnées, souvent tard le soir au Laboratoire de Chimie et Physique Quantique de Toulouse (LCPQ – Université Paul Sabatier) avec Roberto Orlando, sur l'algèbre linéaire appliquée à la physique quantique et à l'IA, ont permis d'affiner le contenu de l'ouvrage et d'ouvrir de nouvelles perspectives stimulantes.
- **M. Sébastien CARAYON**, professeur de mathématiques d'exception. Ancien élève de l'École Centrale de Lyon et titulaire du DEA d'Analyse Numérique de Paris VI (laboratoire Jacques-Louis Lions), il incarne une alliance rare entre rigueur scientifique, passion pédagogique et vision didactique. Son expérience colossale dans l'enseignement des mathématiques a non seulement orienté et enrichi de nombreux sujets de cet ouvrage, mais a aussi profondément marqué son architecture. Ses suggestions, toujours pertinentes et inspirées, ont été déterminantes pour structurer les exercices et les rendre accessibles à tous.

Mais au-delà de son apport académique, je (Maxime Najac) souhaite souligner que M. Carayon a joué un rôle bien plus personnel et transformateur dans mon parcours. Il m'a révélé la beauté et la puissance de cette discipline, bien au-delà des formules et des théorèmes et a su transmettre une passion qui a changé le cours des choses. C'est lui qui m'a guidé vers les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles, éveillant en moi une appétence pour le côté pratique et concret des sciences. Il m'a aidé à développer une conscience scientifique, mais aussi pédagogique, politique et historique — une vision que j'ai tenu à honorer dans ce livre, notamment à travers les nombreuses biographies de mathématiciens qui le jalonnent. Pour tout cela, et bien plus encore, je lui exprime une gratitude infinie. Ce livre porte une partie de son héritage, et j'espère que ces pages sauront transmettre, à leur tour, un peu de cette passion qui m'a été si généreusement offerte.

- **M. Bertrand DELAMOTTE**, enseignant-chercheur à Sorbonne Université, ex-directeur du Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée (LPTMC – Université Pierre et Marie Curie) : Ses conseils éclairés et sa grande expertise nous ont été particulièrement précieux pour aborder la problématique de l'utilisation de la dimension finie ou infinie des espaces d'états (Hilbert) en physique quantique que nous abordons brièvement à l'exercice **30.** du chapitre III et à l'exercice **44.** du chapitre VI.
- **M. Roberto ORLANDO**, chercheur de l'Université de Florence : Ses échanges fréquents, que ce soit par téléphone ou lors de longues discussions au LCPQ à Toulouse, sur les mathématiques pour la physique quantique et l'IA, ont permis d'affiner les exercices concernant la quantique et d'enrichir les remarques. Son implication a été indispensable à la réalisation de cet ouvrage.
- **Pr. Olivier PLUCHERY**, professeur des Universités à l'Institut des NanoSciences de Paris (INSP – Sorbonne Université) et directeur du Groupement de Recherche Or-Nano : Il a relu avec attention les exercices liés à son domaine, la nanophotonique et la plasmonique. Son invitation à visiter son laboratoire à la Sorbonne nous a permis d'élargir le spectre des applications de l'algèbre linéaire, renforçant ainsi la pertinence des exercices proposés.
- **M. Jérôme REY**, professeur agrégé de l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT – Université Paul Sabatier) : Il a orchestré notre rencontre. Son intuition fut la bonne : au-delà de la rédaction de cet ouvrage, il a permis la naissance d'une véritable connivence intellectuelle et humaine, point de départ de multiples projets parallèles. Il a également nourri ce travail de ses suggestions et de son expérience d'enseignant, nous permettant d'en affiner les approches.
- **M. Nicolas SATOR**, enseignant-chercheur à Sorbonne Université, directeur du LPTMC : Son aide précieuse et sa générosité nous ont permis de mieux cerner la question de l'utilisation de la dimension finie ou infinie en physique quantique.

Leur savoir-faire et leur générosité ont grandement contribué à la richesse de cet ouvrage.

Maxime NAJAC
Joseph GRIFONE

Les animations de cet ouvrage ont été conçues à l'aide de Manim (Mathematical Animation Engine), une librairie libre initialement développée par Grant Sanderson (3blue1brown). Nous le remercions chaleureusement pour avoir mis cet outil à disposition de la communauté, ainsi que l'ensemble des contributeurs qui participent activement à son évolution.

Nous restons, bien entendu, à l'écoute de toute remarque ou suggestion qui pourrait aider à améliorer cet ouvrage et rendre l'apprentissage de l'Algèbre Linéaire encore plus accessible et efficace. ^①



1. contact@maximenajac.fr — j.grifone@gmail.com

Notations

Une bonne notation a une subtilité et une suggestivité que la font parfois presque ressembler à un professeur. Des irrégularités de notation sont souvent le premier signe d'erreurs philosophiques [...]

Bertrand RUSSELL



Dans ce livre, nous utiliserons les notations suivantes :

- **Notations générales**

- cf. : *confer*, signifie “se reporter à”.
- i.e. : *id est*, signifie “c’est-à-dire”.

- **Fonctions et dérivées**

- f' ou $\frac{df}{dx}$ (resp. f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$) : dérivée (resp. dérivée seconde) de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Corps et espaces vectoriels**

- K : notation générique pour un corps. Il s’agit généralement ici de sous-corps de $\mathbb{C}$ (donc infinis) ; plus précisément, et selon les recommandations des programmes, on pourra prendre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans tout le livre, on supposera qu’il est de caractéristique différente de 2.
- K' : notation générique pour une *clôture algébrique* de K , c’est-à-dire un corps contenant K dans lequel tout polynôme à coefficients dans K se scinde en produit de facteurs linéaires. Autrement dit, tout polynôme $P \in K[X]$ de degré n admet exactement n racines (comptées avec multiplicité) dans K' . Un tel corps existe toujours, et il est unique à isomorphisme près. Par exemple, $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.
- Si E est un espace vectoriel sur K (ou K -espace vectoriel), $\text{Dim}_K(E)$ (ou $\text{Dim}(E)$ lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté) est la dimension de E . On parle ainsi “d’espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ” ou “d’espace vectoriel réel à n dimensions”.
- $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$: famille composée des éléments $e_1, \dots, e_n$. Une différence est faite avec la notation $(e_1, \dots, e_n)$, qui est un n -uplet, car cette dernière implique un ordre, a contrario de la première. En particulier, au premier chapitre nous utiliserons la notation $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ mais dès le troisième chapitre, un ordre doit être établi dans ces familles pour son utilisation dans les matrices de passages. Ainsi, nous utiliserons la notation $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ou $\mathcal{B}$ si nul besoin d’explicitier les vecteurs.
- $\text{Vect}\{a_1, \dots, a_n\}$: sous-espace vectoriel engendré par une partie/famille A (en particulier les éléments $a_1, \dots, a_n$) de l’espace vectoriel E . On notera, dès le troisième chapitre $\text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$ afin de se conformer à la règle établie au point précédent.

- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$: espace vectoriel réel des fonctions continues de l'intervalle I (de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$: espace vectoriel réel des fonctions indéfiniment dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

• Matrices

- (a_{ij}) : matrice de terme général a_{ij} (à la i -ème ligne et j -ème colonne).
- $M_{(e_i)}(f)$ (resp. $M_{\mathcal{B}}(f)$) : matrice de l'application linéaire f dans la base $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ (resp. $\mathcal{B}$).
- $P_{(e_i) \rightarrow (e_i)'}$ (resp. $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$) : matrice de passage de la base (e_i) à la base $(e_i)'$ (resp. de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).
- I_n (ou I quand il n'y a pas d'ambiguïté) : matrice unité de $\mathcal{M}_n(K)$.
- $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- $\text{Vand}_n(a_1, \dots, a_n)$: matrice de Vandermonde de taille n dont les coefficients sont les nombres $a_1, \dots, a_n$.
- $\mathcal{M}_{n,m}(K)$: anneau des matrices (n, m) (n lignes et m colonnes) à coefficients dans K .
- $\mathcal{M}_n(K)$ est une abréviation de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.
- $GL_n(K)$: groupe (multiplicatif) des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.
- $\mathcal{S}_n(K)$ (resp. $\mathcal{A}_n(K)$) : ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de $\mathcal{M}_n(K)$.
- $\mathcal{T}_n^+$ (resp. $\mathcal{T}_n^-$) : ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(K)$.
- $\longrightarrow$: Équivalence par opérations élémentaires de lignes, préservant le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes.

• Déterminants et spectres

- $\det(A)$ ou $|A|$: déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (la deuxième notation étant plus commode dans les calculs intermédiaires de déterminants).
- $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$: trace de $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$.
- $\text{rg}(A)$: rang de $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$.
- ${}^t A$: transposée de $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ [la notation A^t ou A^T est à proscrire car génératrice de confusions].
- $\text{com}(A)$: comatrice de la matrice carrée A (matrice des cofacteurs).
- P_A (resp. P_u) : *polynôme caractéristique* de la matrice A (resp. de l'endomorphisme u).
- $\text{Sp}_K(A)$ est le *spectre* classique de A sur le corps K . Il s'agit de l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à K . Si le polynôme caractéristique est scindé dans K , il s'écrit : $P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres distinctes. On a alors $\text{Sp}_K(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
- $\text{Sp}'_K(A)$ désigne le *spectre* de A sur K (éventuellement sur la clôture algébrique K'). Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n racines du polynôme caractéristique (égales ou distinctes), on pose : $\text{Sp}'_K(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Contrairement à $\text{Sp}_K(A)$, cette liste contient toutes les racines répétées selon leur multiplicité algébrique.
- $\text{Rac}(P)$: ensemble des racines du polynôme P , c'est-à-dire

$$\text{Rac}(P) = \{\lambda \in K \mid P(\lambda) = 0\}$$

Autrement dit, ce sont les éléments du corps K annulant le polynôme P .

- m_A (resp. m_u) : *polynôme minimal* de la matrice A (resp. de l'endomorphisme u).

• Applications linéaires et endomorphismes

- $\mathcal{L}_K(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F (où E et F sont des espaces vectoriels sur K).
- $\text{End}_K(E)$, $\text{End}(E)$, $\mathcal{L}(E)$, $\dots$: ensemble des endomorphismes (ou opérateurs) du K -espace vectoriel E .
- Id_E : application identité de E dans E .
- $\det(u)$, $\text{tr}(u)$, $\text{rg}(u)$, etc : déterminant, trace, rang, etc de l'endomorphisme u .
- Sauf indications contraires, le K -espace vectoriel K^n est muni de sa base canonique ; ainsi à $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ est canoniquement associée une application linéaire de K^n dans K^m , d'où les notations $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A)$, etc.
- L'isomorphisme canonique de K^n sur $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ est celui qui associe à $x = (x_1, \dots, x_n)$

la matrice unicolonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; des expressions comme AX (ou Ax) ne

devraient pas arrêter le lecteur-étudiant.

• Polynômes

- $K[X]$: anneau des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans K .
- $K_n[X]$: partie de $K[X]$ formée des polynômes de degré $\leq n$. Pour un polynôme de $K[X]$, on écrira P pour désigner l'objet, ou $P(X)$ (en faisant apparaître le graphisme de l'indéterminée X) pour désigner le nombre. Exemple : $P \in K[X]$ ou $P(X) = X^2 + 1$. Étant donné les corps considérés ici, il n'y a pas lieu de distinguer $K[X]$ et l'espace $K[x]$ des fonctions polynômes de K dans K ; on pourra donc considérer le polynôme P comme une application de K dans K (d'où des écritures du type : $\forall x \in K, P(x) = \dots$).

• Normes

- $\|v\|$: norme dans un espace vectoriel normé E . Si E est muni d'un produit scalaire $\langle v, v \rangle$, et en l'absence d'autres précisions, $\|v\|$ désigne la norme issue du produit scalaire, i.e., $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Chapitre I

Espaces Vectoriels



Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement aucune puissance supérieure à 2 n'est la somme de deux puissances analogues. J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir.

Pierre de Fermat[†]

I.1 Rappels de cours

I.1.1 Espaces vectoriels

Définition I.1. Soit K un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur K un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :

A) Une loi interne [c'est à dire une application de $E \times E \rightarrow E$] dite addition, notée $+$, et vérifiant :

$$\text{A.1)} \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E ;$$

$$\text{A.2)} \quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in E ;$$

[†]. *Vita* : Pierre de Fermat (1601–1665) est un magistrat toulousain et mathématicien autodidacte. Il fut l'un des grands esprits scientifiques du XVII^e siècle. Bien qu'éloigné des cercles académiques, il entretint une correspondance soutenue avec les savants de son temps et apporta des contributions majeures à plusieurs domaines : la géométrie analytique, le calcul infinitésimal (préfigurant Newton et Leibniz), et le calcul des probabilités (avec Pascal).

En particulier, son rôle dans l'émergence de la *géométrie analytique* s'est avéré fondamental : vers 1636, Fermat et Descartes posèrent les bases de cette discipline en associant la résolution d'une équation à deux inconnues à la représentation graphique d'une courbe dans le plan. Cette manière d'introduire un *repère* pour exprimer les positions des points par des coordonnées permettait de décrire les objets géométriques à l'aide d'algèbre. C'est dans ce contexte qu'émerge, de manière implicite, l'idée moderne d'*espace vectoriel* : les points du plan deviennent des couples de réels manipulables par des opérations algébriques, et les translations, directions ou combinaisons linéaires prennent un sens vectoriel avant la lettre.

Grand lecteur des Anciens, Fermat annota l'*Arithmetica* de Diophante, formulant en marge de l'un des problèmes une célèbre conjecture sur les puissances, connue sous le nom de *dernier théorème de Fermat* : aucune puissance entière strictement supérieure à 2 ne peut être la somme de deux puissances de même degré. Fermat affirma y avoir une « merveilleuse démonstration », trop longue, selon lui, pour tenir dans la marge. Ce défi mobilisa pendant plus de trois siècles les plus grands mathématiciens, jusqu'à sa démonstration complète en 1994 par Andrew Wiles, au terme d'un développement de près de mille pages — bien au-delà d'une marge.

Fermat mourut à Castres en 1665, et fut inhumé sans faste dans une fosse commune, à l'emplacement de l'actuelle place Jean-Jaurès. Une plaque commémorative y rend aujourd'hui hommage à son célèbre théorème... mais contient une petite erreur. On pourrait dire que, tout comme Fermat avait laissé sa démonstration inachevée « dans la marge », cette plaque a laissé un peu trop de liberté à l'interprétation — et l'erreur s'y est glissée !

Pour en savoir plus sur la vie de Fermat, on pourra consulter les travaux de Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [78] [69], ainsi que ceux de Simon Singh [88].